Universidade Federal de São João del-Rei
Coordenadoria do curso de Matemática
Curso de Matemática

Vanessa da Conceição Guilherme Antunes

Teorema de Classificação de Poincaré

São João del Rei
17 de dezembro de 2015

Vanessa da Conceição Guilherme Antunes

Teorema de Classificação de Poincaré

Monografia apresentada à Coordenadoria do Curso de Matemática da UFSJ, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Ivana de Vasconcellos Latosinski

Doutora em Matemática - IMPA

São João del Rei

17 de dezembro de 2015

Vanessa da Conceição Guilherme Antunes

Teorema de Classificação de Poincaré

Monografia apresentada à Coordenadoria do Curso de Matemática da UFSJ, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Ivana de Vasconcellos Latosinski

Doutora em Matemática - IMPA

Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva

Doutor em Matemática - IMPA

Fábio Alexandre de Matos

Doutor em Matemática - UNICAMP

Resumo

Nosso objetivo é compreender o *Teorema de Classificação de Poincaré*. Para isto fazemos um estudo acerca de alguns conceitos da teoria dos Espaços métricos, além de conceitos como rotações, levantamento e número de rotação. O *Teorema de Classificação de Poincaré* garante a existência de uma semi-conjugação ou uma conjugação entre um homeomorfismo do círculo com número de rotação irracional e uma rotação no círculo.

Palavras-chaves: Espaços métricos, rotações, levantamento, número de rotação.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado força para superar as dificuldades.

A toda minha família e amigos, pelo encorajamento e apoio.

A professora Ivana pela orientação, amizade e principalmente, pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do Departamento de Matemática e Estatística pelos seus ensinamentos e aos funcionários do curso, que durante esses anos, contribuíram de algum modo para o meu enriquecimento pessoal e profissional.

“O pensamento é apenas um lampejo entre duas longas noites, mas esse lampejo é tudo”.

Henri Poincaré

Sumário

1 Introdução

Os Sistemas dinâmicos é um dos ramos de pesquisa da Matemática. O objetivo da teoria de Sistemas Dinâmicos é estudar, principalmente em longo prazo, a evolução de um sistema. Uma vez conhecidas as regras de evolução de um determinado sistema, pode ser impossível, ainda assim, conhecer com boa segurança, sua evolução ao longo do tempo. É nessa perspectiva que se desenvolveu o campo dos Sistemas dinâmicos.

Diversos são os ramos de pesquisa que influenciaram o surgimento da teoria dos Sistemas dinâmicos, como por exemplo, a Física e a Biologia. Tal teoria teve contribuições de vários cientistas, como a do matemático francês Henri Poincaré considerado um dos criadores da moderna teoria dos Sistemas dinâmicos. As primeiras contribuições de Poincaré se deram com os trabalhos relacionados à Mecânica Celeste no final do século XIX.

" *Se conhecêssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação do universo no momento seguinte. Mas, mesmo que as leis da natureza não fossem um segredo para nós, poderíamos prever, apenas aproximadamente, a situação inicial. Se o conhecimento das leis fosse suficiente para prever as situações posteriores, não precisaríamos de mais nada, e poderíamos dizer que o fenômeno tem uma descrição suficientemente precisa. Mas isso nem sempre acontece, podem ocorrer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças bem maiores no fenômeno final. Um pequeno erro no início provoca um enorme erro no final. Previsão se torna impossível, e nos resta o acaso.*"Essa é uma citação da obra de Henri Poincaré, Science et méthode, de 1908. Nessa parte, ele descreve essencialmente o caos, a razão pela qual se torna necessário o estudo qualitativo das soluções de equações diferenciais ou das iteradas de transformações.

Poincaré colocou a questão sobre em que condições um dado homeomorfismo no círculo é equivalente a uma rotação também no círculo. Podemos associar a cada homeomorfismo um número, que chamamos de número de rotação. Se este número é irracional então o teorema da classificação de Poincaré garante que existe uma semi-conjugação ou uma conjugação deste homeomorfismo com uma rotação no círculo.

A seguir, descrevemos brevemente como este trabalho foi desenvolvido.

Na primeira seção, definimos alguns conceitos sobre a teoria dos Espaços métricos, bem como outros conceitos elementares necessários para o estudo da teoria dos Sistemas dinâmicos e que serão fundamentais para o entendimento da teoria posterior. Para isto, utilizamos principalmente as referências [1] (Capítulos 1, 2, 3 e 7), [2] (Capítulos 4 e 5) e [5].

Na segunda seção, definimos o círculo unitário $\mathbb{S}^1$ e introduzimos também os conceitos de rotação, levantamento e número de rotação. Nesta parte, utilizamos as referências [3] (Capítulo 7) e [5].

Na terceira seção, apresentamos o principal resultado deste trabalho, o *Teorema de Classificação de Poincaré*. Nesta seção, foram utilizadas as referências [3] (Capítulo 7) e [4].

Por último fazemos algumas considerações finais sobre os resultados tratados neste trabalho.

No decorrer do trabalho, utilizamos vários outros conceitos e resultados que podem ser encontrados nas demais referências.

2 Algumas definições elementares

Neste capítulo trataremos de algumas definições e resultados básicos que serão essenciais para este trabalho.

2.1 Espaços métricos

Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos x, $y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para todo x, y, $z \in M$:

d1) Se $x = y$, $d(x, y) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ então $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

As condições d1) e d2) dizem que $d(x, y) \geq 0$ e que $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$. A condição d3) diz que a distância $d(x, y)$ é uma função simétrica e a condição d4) chama-se *desigualdade triangular*; ela se inspira no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo nunca excede a soma dos comprimentos dos outros dois.

Definição 2.1.1. Um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M é dito *espaço métrico*.

Os elementos de um espaço métrico podem ser números, pontos, matrizes, funções, vetores, conjuntos, etc. Mas aqui serão sempre chamados de *pontos* de M.

Vejamos um exemplo de espaço métrico.

Exemplo 2.1.1. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço métrico. A distância entre dois pontos x e $y \in \mathbb{R}$ é dada por $d(x, y) = |x - y|$ e é chamada de *métrica usual* da reta. Vejamos que as condições da definição de espaço métrico se verificam:

d1) Sejam x, $y \in \mathbb{R}$, tal que $x = y$. Então $d(x, y) = |x - y| = |x - x| = 0$.

d2) Sejam x, $y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$. Então, $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y)^2} > 0$.

d3) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.

d4)

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x - z| \\ &= |x + y - y - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definição 2.1.2. Seja a um ponto no espaço métrico M. Dado um número real $r > 0$, dizemos que a *bola aberta* de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é menor do que r. Isto é,

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x; a) < r\}.$$

Exemplo 2.1.2. Com a métrica usual da reta, para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $r > 0$, a bola de centro a e raio r é o intervalo aberto, $(a - r, a + r)$, pois a condição $|x - a| < r$ equivale a $-r < x - a < r$ que é o mesmo que $a - r < x < a + r$.

Definição 2.1.3. Seja M um espaço métrico e $X \subset M$. A *fronteira* de X em M é o conjunto ∂X, formado pelos pontos $b \in M$ tais que toda bola aberta de centro b contém pelo menos um ponto de X e um ponto do complementar $M - X$.

Definição 2.1.4. Seja M um espaço métrico. Um ponto $a \in M$ chama-se um *ponto isolado* de M quando existe $r > 0$ tal que $B(a; r) = \{a\}$.

A definição de ponto isolado acima, significa, que além do próprio a, não existem outros pontos de M a uma distância de a inferior a r. Dizer que um ponto *não é isolado* significa que para todo $r > 0$ pode-se encontrar um ponto $x \in A$ tal que $0 < d(a, x) < r$, com $x \neq a$.

Definição 2.1.5. Um espaço métrico M chama-se *discreto* quando todo ponto de M é isolado.

Exemplo 2.1.3. O conjunto $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, onde $x, y \in \mathbb{Z}$ é um conjunto discreto. Para provar isto devemos verificar que todo ponto $n \in \mathbb{Z}$ é isolado. Com efeito, tomando $r = 1$, vemos que se $x \in \mathbb{Z}$ é tal que $x \in B(n; 1)$ então $|x - n| < 1$ e portanto $x = n$.

Definição 2.1.6. Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in M$ chama-se ponto de *acumulação* de X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X, diferente de a.

Um ponto a diz-se *aderente* a um subconjunto X de um espaço métrico M quando $d(a, X) = 0$. Isto significa que existem pontos de X arbitrariamente próximos de a, ou seja, para cada $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(a, X) < \varepsilon$.

Definição 2.1.7. Seja X um subconjunto do espaço métrico M. Dizemos que o conjunto $\overline{X}$, formado pelos pontos de M que são aderentes a X, é o $fecho$ do conjunto X.

Definição 2.1.8. Um subconjunto $X \subset M$ diz-se *denso* em M quando $\overline{X} = M$, ou seja, para cada aberto não-vazio $A \subseteq M$, tem-se $A \cap X \neq \emptyset$.

Exemplo 2.1.4. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é denso em $\mathbb{R}$. Também o conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$. De fato, todo intervalo aberto contém números racionais e números irracionais.

Seja X um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $a \in X$ é dito um *ponto interior* de X quando ele é centro de uma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $r > 0$ tal que $d(x, a) < r$ implica $x \in X$. Chamamos de *interior* de X o conjunto $\text{int } X$ formado pelos pontos interiores a X.

Definição 2.1.9. Seja X um subconjunto de M. Dizemos que X é *denso em nenhum aberto* se $\text{int } \overline{X} = \emptyset$.

Definição 2.1.10. Sejam X e Y dois espaços métricos. Dizemos que a aplicação $f : X \to Y$ é *contínua no ponto* $a \in X$ quando, $\forall \varepsilon > 0$ dado, é possível obter $\delta > 0$, tal que $x \in X$ e $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Dizemos que f é *contínua* quando ela é contínua em todos os pontos $a \in X$. Além disso, dizemos que f é um $homeomorfismo$ se f for bijetiva, contínua e f^{-1} também for contínua.

Uma *sequência* num conjunto M é uma aplicação $s : \mathbb{N} \to M$, definida no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O valor que a sequência x assume no número $n \in \mathbb{N}$

será indicado por x_n. Usaremos as notações $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (x_n) para representar uma sequência.

Uma *subsequência* de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < ...n_k < ...\}$ de $\mathbb{N}$. A subsequência é indicada pelas notações $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...)$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou (x_{n_k}).

Definição 2.1.11. Seja (x_n) uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que o ponto $a \in M$ é *limite* da sequência (x_n) quando para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Escreve-se $a = \lim x_n$.

Proposição 2.1.1. *Toda sequência monótona limitada de números reais é convergente.*

Demonstração. De fato, sem perda de generalidade, consideremos $(x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ...)$ a sequência limitada em questão. Tomemos $a = \sup x_n$. Afirmamos que que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$, sendo menor que a, não pode ser cota superior do conjunto dos valores x_n. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} < a$. Então, $n > n_0$ implica $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon$ e portanto, $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Logo a sequência é convergente. □

Teorema 2.1.1. *(Bolzano Weierstrass) Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. De fato, pela proposição 2.1.1, basta mostrar que toda sequência (x_n) possui uma subsequência monótona. Digamos que um termo x_n da sequência é *destacado* quando $x_n \geq x_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$ o conjunto dos índices n tais que x_n é um termo destacado. Se D for um conjunto infinito, $D = \{n_1 < n_2 < ... < n_k < ...\}$ então a subsequência $(x_n)_{n \in D}$ será monótona não crescente. Agora, se D for finito, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos os $n \in D$. Então x_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $x_{n_1} < x_{n_2}$. Por sua vez, x_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência monótona crescente. □

Definição 2.1.12. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *compacto* se é fechado e limitado.

Um exemplo de conjunto compacto é o intervalo $[a, b]$, visto que ele é fechado e limitado pelos ponto a e b.

Teorema 2.1.2. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X possui uma subsequência convergindo para um ponto de X.*

Demonstração. Se $X \subset \mathbb{R}$ é compacto, toda sequência de pontos de X é limitada logo, pelo teorema de Bolzano - Weierstrass, possui uma subsequência convergente, cujo limite é ponto de X, já que X é fechado.

Reciprocamente, seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto tal que toda sequência de pontos $x_n \in X$ possui uma subsequência que converge para um ponto de X. Então X é limitado pois, caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ poderíamos encontrar $x_n \in X$ com $|x_n| > n$. A sequência (x_n), assim obtida, não possuiria subsequência limitada, logo não teria uma subsequência convergente. O conjunto X é fechado pois, caso contrário, existiria $a \notin X$ com $a = \lim x_n$, onde cada $x_n \in X$. Mas então (x_n) não possuiria subsequência convergindo para um ponto de X, pois todas as subsequências teriam limite a. Portanto X é compacto. □

Definição 2.1.13. Uma sequência (x_n) num espaço métrico M chama-se uma *sequência de Cauchy* quando, paro todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Proposição 2.1.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < 1$. Logo o conjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$ é limitado e tem diâmetro ≤ 1. Segue-se

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, ..., x_{n_0}\} \cup \{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, ...\}$$

é limitado. □

Proposição 2.1.3. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente e tem o mesmo limite que a subsequência.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Então $\lim x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > p$ implica $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Existe também $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\ \{p, q\}$. Para todo $n > n_0$ existe $n_k > n_0$ e então

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Logo, $\lim x_n = a$. □

Definição 2.1.14. Um espaço métrico M é *completo* quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Exemplo 2.1.5. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um espaço métrico completo. Com efeito, seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ ponha $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, daí $X_1 \supset X_2 \supset ... \supset X_n \supset ....$ Pela proposição 2.1.2, o conjunto dos termos de (x_n) é um conjunto limitado, portanto os conjuntos X_n também limitados, já que são subconjuntos de um conjunto limitado. Seja $a_n = \inf X_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, então, $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b = \sup X_1$. Como toda sequência monótona limitada de números reais é convergente (Proposição 2.1.1), existe $a = \lim a_n$.

Afirmamos que $a = \lim x_n$. Para provar essa afirmação, basta mostrar que a é limite de uma subsequência de (x_n), isto é, que dados arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$, podemos obter $n > n_1$ tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pois pela proposição 2.1.3, uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente também é convergente e possui o mesmo limite que a subsequência. Sendo $a = \lim a_n$, existe $m > n_1$ tal que $a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$. Como $a_m = \inf X_m$, existe $n \geq m$, e portanto $n > n_1$, tal que $a_m \leq x_n \leq a + \varepsilon$, ou seja, $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Na seção a seguir daremos uma primeira visão sobre Sistemas dinâmicos.

2.2 Sistemas dinâmicos

Consideremos um espaço qualquer e uma lei que rege o comportamento de seus elementos. A teoria dos *Sistemas Dinâmicos* é o estudo que tem por finalidade a estruturação de técnicas capazes de compreender e prever a evolução desses sistemas em longo prazo. Podemos dividir os sistemas dinâmicos em duas classes:

- *Sistema dinâmico discreto*: Seu estado só muda durante os instantes $(t_0, t_1, t_2, ...)$. No intervalo de tempo entre estes instantes, o estado permanece constante, t assume valores inteiros. Exemplo: Iteração de uma função.

- *Sistema dinâmico contínuo*: Seu estado evolui ao longo do espaço de estado continuamente de acordo com uma regra determinística. Exemplo: Solução de uma Equação diferencial ordinária.

Neste trabalho, vamos estudar um exemplo de sistema dinâmico discreto definido por uma aplicação contínua em um espaço métrico.

Consideremos um conjunto não-vazio X e uma aplicação $f : X \to X$, dizemos que f^2 é o segundo iterado de f, f^3 é o terceiro iterado de f e assim por diante. Isto é

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{n \ vezes}$$

é o n-ésimo iterado de f.

Definição 2.2.1. Considere um conjunto não-vazio X e uma aplicação $f : X \to X$. Para cada $x \in X$, $O_f^+(x) = \cup_{t\geq 0}^{t\in\mathbb{Z}} f^t(x)$ é chamada de semi-órbita positiva. Se f é invertível a semi-órbita negativa é dada por $O_f^-(x) = \cup_{t\leq 0}^{t\in\mathbb{Z}} f^t(x)$. A órbita de $x \in X$ é dada por $O_f(x) = O_f^+(x) \cup O_f^-(x) = \cup_{t\in\mathbb{Z}} f^t(x)$.

Exemplo 2.2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação definida por $f(x) = 2x$. Essa aplicação é invertível, então a órbita de $x_0 = 2$ é

$$\begin{array}{rcl} & \vdots & \\ x_{-2} & = & \frac{1}{4} \\ x_{-1} & = & \frac{1}{2} \\ x_0 & = & 2 \\ x_1 & = & 2.x_0 = 2.2 = 4 \\ x_2 & = & 2.x_1 = 2.4 = 8 \\ & \vdots & \end{array}$$

Agora, definiremos dois tipos de órbita, a órbita do ponto fixo e a órbita do ponto periódico.

Definição 2.2.2. Consideremos um conjunto não-vazio X e uma aplicação $f : X \to X$. Um ponto $x \in X$ é *fixo* se $\forall t \in Z$, tem-se $f^t(x) = x$. Assim, a *órbita do ponto fixo* é uma sequência constante

$$..., x, x, x, ...$$

Definição 2.2.3. Considere um conjunto não-vazio X e uma aplicação $f : X \to X$. Dizemos que um ponto $x \in X$ é um ponto *periódico* de período $n > 0$ se $f^n(x) = x$ e

$f^i(x) \neq x$, para todo $1 \leq i \leq (n-1)$.

Chamaremos de $Per_n(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de período n. A órbita de um ponto periódico é chamada de *órbita periódica*. Assim, se x é um ponto periódico de período n para uma aplicação f, então a órbita de x é uma sequência repetitiva de números, isto é,

$$..., x, f(x), ..., f^{n-1}(x), x, f(x), ..., f^{n-1}(x), ...$$

Quando temos uma órbita $O(x)$ podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. Este conjunto é conhecido como o *ω-limite* de x e denotado por $\omega(x)$. Isto é,

Definição 2.2.4. Dizemos que $y \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente de números naturais n_1,n_2,... tal que $f^{n_k}(x) \to y$.

Exemplo 2.2.2. Se $f^n(x) = x$ é um ponto periódico, então o conjunto $\omega - limite$ é igual a órbita de x por f, isto é, $\omega(x) = O(x) = \{x, f(x), ..., f^{n-1}(x)\}$.

Definição 2.2.5. O subconjunto $S \subset X$ é dito *positivamente invariante* se $f(x) \in S$ para todo $x \in S$, isto é $f(S) \subset S$. O subconjunto $S \subset X$ é dito *negativamente invariante* se $f^{-1}(S) \subset S$. O subconjunto $S \subset X$ é *invariante* se $f(S) = S$.

Proposição 2.2.1. *Seja $f : X \to X$ um sistema dinâmico contínuo, onde X é um conjunto compacto então, o conjunto $\omega(x)$ é não vazio, compacto e invariante.*

Demonstração. $\omega(x)$ é um conjunto fechado. De fato, seja $y \in \overline{\omega(x)}$. Se $\omega(x)$ é um conjunto fechado então, o fato de $y \in \overline{\omega(x)}$ implica que $y \in \omega(x)$. Suponhamos, por absurdo, que $y \notin \omega(x)$, então existe uma vizinhança V_y de y que não contém nenhum elemento da órbita de x. Mas o fato de $y \in \overline{\omega(x)}$ e $y \notin \omega(x)$ implica que $y \in \partial\omega(x)$ e portanto existem pontos que estão na vizinhança V_y de y que são pontos de $\omega(x)$. Logo, essa vizinhança deve conter elementos da órbita de x, o que é uma contradição. Portanto $\omega(x)$ é fechado.

Agora, $\omega(x)$ é um conjunto compacto. Com efeito, $\omega(x)$ é fechado e como está contido no compacto X, é limitado. Logo $\omega(x)$ também é compacto.

O conjunto $\omega(x)$ é não vazio. De fato, a órbita de x está dentro de um compacto. Como todo compacto possui uma subsequência que converge para algum de seus pontos, segue-se que $\omega(x) \neq \emptyset$.

Resta-nos mostrar que $\omega(x)$ é um conjunto invariante, isto é, $\omega(x) = f(\omega(x))$

para todo x. Seja $y \in f(\omega(x))$, então existe $z \in \omega(x)$ tal que $f(z) = y$. Assim, existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to z$. Pela continuidade de f, vale que $f(f^{n_k}(x)) \to f(z) = y$, isto é, $f^{n_k+1}(x) \to y$. Como $n_k \to \infty$, segue-se que $(x_k + 1) \to \infty$ e portanto $y \in \omega(x)$. Assim, $f(\omega(x)) \subset \omega(x)$. Por outro lado, se $y \in \omega(x)$, devemos mostrar que existe $z \in \omega(x)$ tal que $f(z) = y \in f(\omega(x))$. Com efeito, o fato de $y \in \omega(x)$ implica que existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Tomemos as pré-imagens da sequência n_k que estão na órbita de x. Tais pré-imagens formam uma sequência n'_k contida no conjunto compacto X. Desse modo, n'_k possui uma subsequência que converge para $z \in \omega(x)$. Assim, $n'_k \to z$ e portanto $f(n'_k) \to f(z) = y$. Logo, $y \in f(\omega(x))$. Dessa forma concluímos que $\omega(x) = f(\omega(x))$ e portanto $\omega(x)$ é invariante. $\square$

Teorema 2.2.1. *Seja $f : X \to X$ uma aplicação contínua em um espaço métrico completo X.*

(a) Para qualquer x, $\omega(x) = \cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$.

(b) Se $D \subset X$ é fechado e positivamente invariante por f. Se $x \in D$, então $\omega(x) \subset D$.

(c) Se $y \in \omega(x)$ então $\omega(y) \subset \omega(x)$.

Demonstração. (a) Seja $y \in \omega(x)$. Então, $y \in \overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$ pela definição do conjunto $\omega - limite$. Portanto, $y \in \cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$. Assim, $\omega(x) \subset \cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$. Suponha agora que $y \in \cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$. Então, para qualquer N, tem-se que $y \in \overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$. Para cada N, tome $k_N > k_{N-1}$, com $k_N \geq N$ e $d(f^{k_N}(x), y) < \frac{1}{N}$. Então, $d(f^{k_N}(x), y) < \frac{1}{N}$ vai para 0 quando N tende a infinito e portanto, $y \in \omega(x)$. Logo, $\cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))} \subset \omega(x)$. Assim, concluímos que $\omega(x) = \cap_{N\geq 0}\overline{(\cup_{n\geq N} f^n(x))}$, para todo x.

(b) Decorre da parte (a) o seguinte argumento.
Seja $x \in D$. Pela invariância de D, $f^n(x) \in D$. Como D é fechado, todos os pontos de $f^n(x)$ devem estar em D, provando que $\omega(x) \subset D$.

(c) Seja $y \in \omega(x)$. O conjunto $\omega(x)$ é fechado e positivamente invariante. Logo, pela parte (b), $\omega(y) \subset \omega(x)$.

$\square$

Definição 2.2.6. Um sistema dinâmico topológico $f : X \to X$ diz-se *topologicamente transitivo* se existe um ponto $x \in X$ tal que sua órbita $O_f(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ é densa em X.

Definição 2.2.7. Um sistema dinâmico topológico $f : X \to X$ diz-se *minimal* se a órbita de qualquer ponto $x \in X$ é densa em X ou ainda se f não tem conjuntos invariantes fechados próprios.

Definição 2.2.8. Um conjunto X é *minimal* para uma função f se é não-vazio, fechado e invariante e dado B, um subconjunto não-vazio, fechado e invariante de X, tem-se $B = X$.

3 O círculo unitário

Podemos definir o círculo unitário, denotado por $\mathbb{S}^1$, como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; ||x|| = 1\}$$

equivalentemente,

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos\,\theta,\, \sin\,\theta) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Fazendo $\theta = 2\pi x$, temos

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos\,2\pi x,\, \sin\,2\pi x) \in \mathbb{R}^2;\, 0 \leq x \leq 1\ \}$$

A última forma explicita a projeção,
$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, com $\pi(x) = (\cos\,2\pi x,\, \sin\,2\pi x\ ) = \cos(2\pi x) + i\, \sin(2\pi x) = \exp(2\pi x i)$

Podemos também escrever $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Neste caso, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ é o quociente do grupo aditivo dos números reais pelo subgrupo aditivo dos inteiros. Daí, a projeção π pode ser vista como uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e por abuso de notação podemos escrever

$$\pi(x) = x \pmod 1$$

Neste caso, podemos verificar que $\pi(x+m) = \pi(x)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \pi(x+m) &= (x+m)(mod 1) \\ &= x+m+n \\ &= x(mod 1) \\ &= \pi(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Repare que π é sobrejetiva, mas não é injetiva. Na verdade, $\pi^{-1}(x) = \{x+m : m \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto infinito.

O círculo $\mathbb{S}^1$ é um espaço métrico. A distância entre dois pontos a, $b \in \mathbb{S}^1$ é a mesma que a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^2$, já que os pontos de $\mathbb{S}^1$ são pontos de $\mathbb{R}^2$. Assim, a distância entre dois pontos $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2) \in \mathbb{S}^1$ é dada por

$d(a,b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Sejam $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ e $c = (x_3, y_3)$ pontos quaisquer de $\mathbb{S}^1$. Verifiquemos que as condições da definição de espaço métrico são satisfeitas:

d1) Se $a = b$ então $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e portanto, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Daí $d(a,b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = 0$.

d2) Seja $a \neq b$. Então, $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} > 0$.

d3) $d(a,b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(b,a)$.

d4)

$$\begin{aligned}
d(a,c) &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\
&= |a - c| \\
&= |a + b - b - c| \\
&\leq |a - b| + |b - c| \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \\
&= d(a,b) + d(b,c) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Definição 3.0.9. Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo. Se sempre que $x, y \in \mathbb{S}^1$ com $x < y$ tivermos $f(x) < f(y)$, considerando o sentido anti-horário no círculo, então f preserva orientação. Assim, dizemos que $f \in Hom_+(\mathbb{S}^1)$.

Definição 3.0.10. Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ duas aplicações. Se existir um homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$, isto é, $f = h^{-1} \circ g \circ h$ então dizemos que f e g são *topologicamente conjugados*. O homeomorfismo h é chamado de *conjugação topológica*.

Definição 3.0.11. Uma transformação $g : N \to N$ é um *fator* (ou *fator topológico*) de $f : M \to M$ se existir uma transformação contínua sobrejetiva $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. A transformação h diz-se uma *semi-conjugação*.

A diferença entre os casos em que duas transformações são conjugadas ou semi-conjugadas se dá pelo fato de que no primeiro caso a transformação h é um homeomorfismo e no segundo caso h é apenas contínua e sobrejetiva.

No caso de transformações conjugadas, o fato de h ser um homeomorfismo significa que os conjuntos M e N são *homeomorfos*. Do ponto de vista da topologia, dois conjuntos homeomorfos são indistinguíveis.

Duas aplicações topologicamente conjugadas são ditas *equivalentes*, pois carregam as mesmas propriedades topológicas.

Podemos verificar que se f e g são equivalentes, então existe uma conjugação que leva ponto periódico de mesmo período em ponto periódico de mesmo período e ponto fixo em ponto fixo. Em outas palavras, sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ conjugadas pelo homeomorfismo $h : M \to N$ e $x \in M$. Se $f^n(x) = x$ então $g^n(h(x)) = h(x)$. De fato,

$$\begin{aligned}
g^n(h(x)) &= g^n \circ h(x) \\
&= g^{n-1} \circ g \circ h(x) \\
&= g^{n-1} \circ h \circ f(x) \\
&= g^{n-2} \circ g \circ h \circ f(x) \\
&= g^{n-2} \circ h \circ f \circ f(x) \\
&= g^{n-2} \circ h \circ f^2(x) \\
&= g^{n-3} \circ g \circ h \circ f^2(x) \\
&= g^{n-3} \circ h \circ f \circ f^2(x) \\
&= g^{n-3} \circ h \circ f^3(x) \\
&\vdots \\
&= g \circ h \circ f^{n-1}(x) \\
&= h \circ f \circ f^{n-1}(x) \\
&= h \circ f^n(x) \\
&= h(x) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Agora, se $f(x) = x$, então $g(h(x)) = h(x)$. De fato, $g(h(x)) = h(f(x)) = h(x)$.

Além de outras propriedades das aplicações topologicamente conjugadas, pode-se também verificar que uma órbita de f é levada por h em uma órbita de g e que uma órbita densa de f é levada em uma órbita densa de g.

3.1 Rotações

Seja $\rho \in \mathbb{R}$ dado e $R_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, onde $R_\rho(x) = (x + \rho)(\text{mod } 1)$. Considerando $\mathbb{S}^1 = \{(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \le x \le 1 \ \}$, teremos

$$(\cos\,(2\pi x),\, \sin\,(2\pi x)) \mapsto (\cos\,(2\pi(x+\rho)),\, \sin\,(2\pi(x+\rho))),$$

que é uma rotação.

Se $\rho \in [0,1)$, então as rotações podem ser reescritas assim:

$$R_\rho(x) = \begin{cases} x+\rho, & \text{se} \quad 0 \leq x+\rho \leq 1 \\ x+\rho-1, & \text{se} \quad x+\rho > 1. \end{cases}$$

Vejamos agora um estudo das órbitas de R_ρ, nos casos em que ρ é racional ou irracional:

1) Se $\rho \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\rho = \frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, todos os pontos de $\mathbb{S}^1$ são periódicos de período q. De fato, tome $x \in \mathbb{S}^1$, então $R_\rho^q(x) = (x + q.\frac{p}{q})(\text{mod}1) = (x+p)(\text{mod}1)$ $= x$.

2) Se $\rho \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, teremos que $R_\rho^n(x) \neq x$, $\forall n \neq 0$ e $x \in \mathbb{S}^1$. Com efeito, se existir $x \in \mathbb{S}^1$ e $n \neq 0$ com $R_\rho^n(x) = x$, então $(x+n\rho)(\text{mod}1)= x$, o que é possível se, e somente se, $n\rho \in \mathbb{Z}$. Mas isto é impossível, pois ρ é irracional.

Um importante teorema, para quando ρ é irracional é o *Teorema de Jacobi*. Este teorema nos diz que sob a ação de uma rotação irracional, qualquer ponto, além de ter uma órbita não periódica, essa órbita precisa ser densa em $\mathbb{S}^1$. Antes de enunciarmos este teorema, precisaremos do seguinte lema, que será útil para a sua demonstração.

Lema 3.1.1. *(Do ponto fixo). Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Então existe um ponto fixo para f em $[a,b]$.*

Demonstração. O *Teorema do Valor Intermediário* nos diz que dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, se $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$. Aplicaremos este teorema sobre a função $h(x) = f(x) - x$. Note que $h(x)$ é contínua, pois é a diferença de duas funções contínuas. Desse modo ela satisfaz $h(a) = f(a)-a > 0$ e $h(b) = f(b)-b < 0$. Por isso, pelo Teorema do Valor Intermediário existe um $c \in [a,b]$ com $h(c) = 0$. Então $f(c) - c = 0$ e c é ponto fixo em $[a,b]$. □

Teorema 3.1.1. *(Teorema de Jacobi) Se $\rho \notin \mathbb{Q}$, então $\forall x \in \mathbb{S}^1$, $\{R_\rho^n(x)\}$, com $n \in \mathbb{Z}$,é densa em $\mathbb{S}^1$. Em outras palavras, $X = \overline{\{R_\rho^n(x)\}}_{n\in\mathbb{Z}} = \mathbb{S}^1$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{S}^1$ um ponto arbitrário e $X \subset \mathbb{S}^1$ o fecho da órbita de x. Se a órbita de x não é densa, isto é $X \nsubseteq \mathbb{S}^1$, então $\mathbb{S}^1 - X$ é não-vazio, aberto, já que seu complementar, X, é fechado. Além disso, o fato de a órbita de x não ser densa em $\mathbb{S}^1 - X$ implica que existem intervalos disjuntos em $\mathbb{S}^1$ que não possuem pontos dessa órbita. Logo, $\mathbb{S}^1 - X$ consiste de intervalos disjuntos.

Tome I como sendo o maior desses intervalos, ou um dos maiores, se existir mais que um com comprimento máximo. Como a rotação preserva o comprimento de qualquer intervalo, os iterados $R_\rho^n(I)$ não podem se sobrepor pois, caso contrário, $\mathbb{S}^1 - X$ conteria um intervalo maior que I.

Sendo ρ irracional, os iterados de I não podem coincidir pois se existem $i, j \in \mathbb{Z}$ tais que $R_\rho^i(I) = R_\rho^j(I)$, então $R_\rho^{i-j}(I) = I$ e $R_\rho^{i-j} : I \to I$ seria uma aplicação de I nele mesmo. Logo, pela continuidade de R_ρ e pelo lema do ponto fixo, $R_\rho^{i-j} : \overline{I} \to \overline{I}$ possuiria um ponto fixo, contradizendo o fato de ρ ser irracional.

Assim, os iterados de $R_\rho^n(I)$ são todos disjuntos, mas isso é impossível, já que o círculo tem comprimento finito. Logo, $X = \mathbb{S}^1$. O teorema está demonstrado. $\square$

Até agora, vimos que ao estudarmos as rotações, temos que se a rotação é racional, todas as órbitas são periódicas e de mesmo período. Enquanto que se a rotação é irracional, todas as órbitas são densas.

3.2 Levantamento

Nesta seção definiremos o que vem a ser um levantamento de uma função definida no círculo unitário $\mathbb{S}^1$. Para isso, relembramos que a projeção $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ é definida por $\pi(x) = x(mod1)$.

Definição 3.2.1. Dizemos que uma função contínua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um levantamento da aplicação contínua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ se

$$\pi \circ F = f \circ \pi$$

Graficamente, temos:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Exemplo 3.2.1. Seja $R_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $R_\rho(x) = x + \rho(mod1)$, a aplicação rotação. A aplicação $F_{\rho,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_{\rho,k}(x) = x+\rho+k$ é um levantamento de R_ρ, para todo $k \in \mathbb{Z}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$, então $R_\rho(\pi(x)) = R_\rho(x(mod1)) = (x((mod1))+\rho)(mod1) = (x+\rho)(mod1)$. Por outro lado, $\pi(F_{\rho,k}(x)) = \pi(x+\rho+k) = (x+\rho+k)(mod1) = (x+\rho)(mod1)$. Logo, $\pi \circ F_{\rho,k} = R_\rho \circ \pi$.

Os levantamentos de um mesmo homeomorfismo não são únicos, mas estão relacionados de acordo com o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Um dado homeomorfismo do círculo possui infinitos levantamentos. Tais levantamentos diferem dois a dois por uma função constante.*

Demonstração. Sejam $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dois levantamentos de f. Então, mostraremos que existe uma função constante k, tal que $F_1(x) = F_2(x) + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$, então

$$\pi \circ F_1(x) = f \circ \pi(x) \;\; e \;\; \pi \circ F_2(x) = f \circ \pi(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\pi \circ F_1 &= \pi \circ F_2 \\
&\Rightarrow \\
\pi(F_1(x)) &= \pi(F_2(x)) \\
&\Rightarrow \\
\pi(F_1(x)) - \pi(F_2(x)) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
F_1(x)(mod1) - F_2(x)(mod1) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
(F_1(x) - F_2(x))(mod1) &= 0 \\
&\Rightarrow \\
F_1(x) - F_2(x) &= k = k(x).
\end{aligned}$$

Agora, k não depende de x. De fato, temos que $F_1(x) - F_2(x) = k$, então $(F_1 - F_2)(x) = k$ e portanto $(F_1 - F_2)(x) \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Como F_1 e F_2 são contínuas, segue-se que $F_1 - F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ é contínua. Mas $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto, então $F_1 - F_2$ tem um único inteiro k como imagem $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo $F_1(x) - F_2(x) = k$, com k independendo de x. □

O lema anterior, nos diz que podemos encontrar todos os levantamentos de f a partir de um levantamento fixo. Podemos provar ainda que $\pi(F(x+1)) = \pi(F(x))$. Com efeito,

$$\pi(F(x+1)) = f(\pi(x+1)) = f(\pi(x)) = \pi(F(x)).$$

Do fato de $\pi(F(x+1)) = \pi(F(x))$, segue-se que $F(x+1)(mod 1) = F(x)(mod 1)$, isto é

$$F(x+1) = F(x) + d,\ d \in \mathbb{Z}.$$

Definição 3.2.2. O *grau* de uma aplicação contínua f em $\mathbb{S}^1$ é o número $d = F(x+1) - F(x)$, onde F é um levantamento qualquer de f. Denotamos o grau de f por $deg(f)$.

Veremos que qualquer homeomorfismo do círculo deve ter $deg(f) = +1$ ou $deg(f) = -1$. Além disso, se o homeomorfismo é crescente, ou seja, preserva orientação, então $deg(f) = 1$.

Tomemos $x' \in \mathbb{S}^1$, assim se $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é contínua com $deg(f) = d$, então o conjunto das pré-imagens de x', $f^{-1}(x')$ contém, pelo menos, d pontos. De fato, suponha que f é estritamente monótona. Como $x' \in \mathbb{S}^1$, existe $z_i \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(z_i) = x'$. Além disso, como $deg(f) = d$, temos que $F(x+1) - F(x) = d$ e portanto o intervalo $[F(x), F(x+1)]$ tem comprimento igual a d. Podemos então enxergá-lo como uma decomposição em d intervalos $[F(x), F(x)+1]$, $[F(x)+1, F(x)+2]$, ..., $[F(x)+(d-1), F(x)+d]$. Daí, se $z_i \in [F(x), F(x)+i]$, $i = 1, 2, ..., d$, pelo Teorema de Valor Intermediário, existe $x_i \in (x, x+1)$, tal que $F(x_i) = z_i$ e então $\pi(F(x_i)) = \pi(z_i) = x'$. Seja $x'_i = \pi(x_i)$ então,

$$f(x'_i) = f(\pi(x_i)) = \pi(F(x_i)) = x'.$$

Logo, $f^{-1}(x') = \{x'_i : i = 1, 2, ..., d\}$. Se, por outro lado, f não é estritamente monótona, então alguns pontos terão mais do que d imagens inversas.

Assim, qualquer homeomorfismo do círculo deve ter $deg(f) = +1$ ou $deg(f) = -1$, pois caso contrário os pontos de $\mathbb{S}^1$ teriam mais que uma pré-imagem e f não seria um homeomorfismo.

Em particular, no caso de homeomorfismos que preservam orientação no círculo temos que $deg(f) = 1$, pois caso contrário f não seria crescente. Como $F(x+1) = F(x)+d$, segue-se que

$$\begin{aligned} F(x+m) &= F(x+m-1)+d \\ &= F(x+m-2)+2d \\ &\vdots \\ &= F(x)+md \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F^n(x+m) &= F^{n-1}(F(x+m)) \\ &= F^{n-1}(F(x)+md) \\ &= F^{n-2}(F^2(x)+md^2) \\ &\vdots \\ &= F^n(x)+md^n \end{aligned}$$

No caso de homeomorfismos que preservam orientação, temos que $F(x+m) = F(x)+m$ e $F^n(x+m) = F^n(x)+m$.

Lema 3.2.2. *Sejam F e H levantamentos de f. Então, $F^n(x) = H^n(x)+nk$.*

Demonstração. Com efeito, por indução, temos que se $n = 1$, então, já vimos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $F(x) = H(x)+k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suponha que $F^t(x) = H^t(x)+tk$ para todo inteiro t maior do que ou igual a 1 e menor do que n. Então $F^n(x) = F^{n-1}(F(x)) = H^{n-1}(F(x))+(n-1)k = H^{n-1}(H(x)+k)+(n-1)k = H^{n-1}(H(x))+k+(n-1)k = H^n+nk$, usando a hipótese de indução. Portanto, a igualdade é válida para todo inteiro maior ou igual a 1. $\square$

Observe ainda que se F é um levantamento de f, então F^n é um levantamento de f^n. De fato, por indução, se $n = 1$, a afirmação é verdadeira por hipótese. Suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo inteiro maior do que ou igual a 1 e menor que n. Daí, utilizando a definição de levantamento, temos

$$\pi \circ F^n = \pi \circ F^{n-1} \circ F = f^{n-1} \circ \pi \circ F = f^{n-1} \circ f \circ \pi = f^n \circ \pi.$$

O que prova a afirmação.

Exemplo 3.2.2. No exemplo 3.2.1 vimos que a aplicação $F_{\alpha,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_{\alpha,k}(x) = x+\alpha+k$ é um levantamento de $f_\alpha : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $f_\alpha(x) = x+\alpha(mod1)$. Veremos agora que $F^n_{\alpha,k}(x) = x+n\alpha+nk$ é um levantamento de $f^n_\alpha(x) = x+n\alpha(mod1)$. De fato, seja $x \in \mathbb{R}$, então $f^n_\alpha(\pi(x)) = f^n_\alpha(x(mod1)) = (x((mod1)) + n\alpha)(mod1) = (x+n\alpha)(mod1)$. Por outro lado, $\pi(F^n_{\alpha,k}(x)) = \pi(x+n\alpha+nk) = (x+n\alpha+nk)(mod1) = (x+n\alpha)(mod1)$. Logo, $\pi \circ F^n_{\alpha,k} = f^n_\alpha \circ \pi$.

3.3 Número de rotação

O número de rotação é um número real associado a aplicação f, definida no círculo unitário $\mathbb{S}^1$. Neste trabalho estudaremos como o número de rotação caracteriza o comportamento das órbitas de f.

Definição 3.3.1. Sejam $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo que preserva orientação no círculo e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento qualquer de f. O número $\rho(f) = \rho_0(F)(mod1)$ é chamado de *número de rotação* de f, onde

$$\rho_0(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

sempre existe.

Esta definição nos diz o quanto em média cada iterado de um ponto $x \in \mathbb{S}^1$, "caminha"pelo homeomorfismo f.

Precisamos verificar se o número de rotação está bem definido. Para isto, temos os dois próximos resultados.

Proposição 3.3.1. *O número de rotação de f independe do levantamento F.*

Demonstração. Sejam F e H dois levantamento de f, então, já vimos que $F = H + k$ e

$F^n = H^n + nk$, $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned}\rho_0(F) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(H^n(x) + nk) - x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{H^n(x) - x}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{nk}{n} \\ &= \rho_0(H) + k. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo, $\rho(f) = \rho_0(F)(mod1) = (\rho_0(H) + k)(mod1) = \rho_0(H)(mod1)$. □

O próximo teorema nos diz que para qualquer levantamento de um homeomorfismo do círculo que preserva orientação existe um número de rotação, e que este é independente do ponto inicial.

Teorema 3.3.1. *Sejam $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo que preserva orientação no círculo e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f. Então, $\forall x \in \mathbb{R}$, o limite*

$$\rho_0(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

existe e independe do ponto x.

Demonstração. **Existência:** Precisamos mostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$ exista. Para isto, consideraremos dois casos. Primeiro o caso em que f tem um ponto periódico de período q e depois o caso em que f não tem pontos periódicos.

1. **f tem um ponto periódico de período q.**

   Como f tem um ponto periódico de período q, então existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$.

   Como F é um levantamento de f, já vimos que F^q é um levantamento de f^q, logo $\pi \circ F^q = f^q \circ \pi$. Daí, $\pi(F^q(x_0)) = f^q(\pi(x_0)) = \pi(x_0)$, isto é $\pi(F^q(x_0)) = \pi(x_0)$ e portanto, $F^q(x_0)(mod1) = x_0(mod1)$ e então, $F^q(x_0) = x_0 + p$, $p \in \mathbb{Z}$.

   Afirmação: O limite existe e além disso, é racional.

   De fato, tomemos $n \in \mathbb{N}$, então pelo algoritmo da divisão euclidiana, $n = kq + r$, com $0 \leq r < q$. Assim,

$$\begin{aligned} F^n(x_0) = F^{kq+r}(x_0) &= F^r(F^{kq}(x_0)) \\ &= F^r(F^{q(k-1)}(F^q(x_0)) \\ &= F^r(F^{q(k-1)}(x_0+p)) \\ &= F^r(F^{q(k-2)}(F^q(x_0+p)) \\ &= F^r(F^{q(k-2)}((x_0+2p)) \\ &\vdots \\ &= F^r(x_0+kp) \\ &= F^r(x_0)+kp, \quad com \quad p \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_0)-x_0}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^r(x_0)+kp-x_0}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^r(x_0)-x_0}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{kp}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^r(x_0)-x_0}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{kp}{kq+r} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^r(x_0)-x_0}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{p}{q+\frac{r}{k}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como $n = kq+r$ e $r = 0, 1, 2, 3, ..., q-1$, então $F^r(x_0)-x_0 \leq \max |F^j(x_0)-x_0| = M$, onde $j \in \{0, ..., q-1\}$. Logo, $|F^r(x_0)-x_0|$ é limitado e $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{F^r(x_0)-x_0}{n} = 0$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{p}{q+\frac{r}{k}} = \frac{p}{q}$, segue que $\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_0)-x_0}{n} = \frac{p}{q}$.
O que comprova a afirmação.

2. ***f* não tem pontos periódicos.**

   Como f não tem pontos periódicos, não existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $f^q(\pi(x)) \neq \pi(x)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$ e então $\pi(F^q(x)) = f^q(\pi(x)) \neq \pi(x)$. Portanto $F^q(x)(mod 1) \neq x(mod 1)$, isto é, $F^q(x) \neq x+p$, $p \in \mathbb{Z}$.

   Isto significa que não existe p, $q \in \mathbb{N}$, tal que $F^q(x) = x+p$, $\forall x \in \mathbb{R}$, isto é, $F^q(x) - x \notin \mathbb{Z}$.

   Fixando x, então para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, existe $p_n \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$F^n(x) - x \in (p_n - 1, p_n) \qquad \text{(i)}$$

   Daí, pelo Teorema do Valor Intermediário, o mesmo p_n serve $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, seja $\alpha = F^n(x) - x$, então α é contínua. Tome k_1, k_2, k_3, $k_4 \in \mathbb{Z}$ com $k_1 <$

$k_2 \leq k_3 < k_4$. Supondo que $\exists a,\ b \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(a) \in (k_1, k_2)$ e $\alpha(b) \in (k_3, k_4)$ então, pela continuidade de α, deve existir $c \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(c) = k_2 \in \mathbb{Z}$, isto é, $F^n(c) - c = k_2 \in \mathbb{Z}$, o que é uma contradição. Logo

$$p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(ii)}$$

Usando (ii) para x_0, $F^n(x_0)$, $F^{2n}(x_0)$, ..., e para qualquer $m \in \mathbb{N}$, teremos

$$m \text{ parcelas} \begin{cases} p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n \\ p_n - 1 < F^n(F^n(x_0)) - F^n(x_0) < p_n \\ p_n - 1 < F^n(F^{2n}(x_0)) - F^{2n}(x_0) < p_n \\ \vdots \\ p_n - 1 < F^n(F^{(m-1)n}(x_0)) - F^{(m-1)n}(x_0) < p_n \end{cases}$$

Somando as m parcelas acima, temos:

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x_0) - x_0 < mp_n$$

Multiplicando as parcelas desta desigualdade por $\frac{1}{mn}$, temos:

$$\tfrac{p_n}{n} - \tfrac{1}{n} < \tfrac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} < \tfrac{p_n}{n}$$

Portanto,

$$\left| \tfrac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \tfrac{p_n}{n} \right| < \tfrac{1}{n}$$

E, invertendo os papéis de m e n temos

$$\left| \tfrac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \tfrac{p_m}{m} \right| < \tfrac{1}{m}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_m}{m} - \frac{p_n}{n} \right| &= \left| \frac{p_m}{m} - \frac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} + \frac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_n}{n} \right| + \left| \frac{F^{mn}(x_0) - x_0}{mn} - \frac{p_m}{m} \right| \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{m}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Isto significa que a sequência $(\frac{p_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Mas $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, logo toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ converge. Segue que a sequência $(\frac{p_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Já vimos que

$$|\tfrac{F^{mn}(x_0)-x_0}{mn} - \tfrac{p_n}{n}| < \tfrac{1}{n}$$

Então, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x_0)-x_0}{n}$ existe, uma vez que as sequências $(\frac{F^n(x_0)-x_0}{n})$ e $(\frac{p_n}{n})$ tornam-se arbitrariamente próximas a medida que $n \to \infty$ e a sequência $(\frac{p_n}{n})$ converge. Isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x_0)-x_0}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n}$$

O limite independe de x: Como f é um homeomorfismo que preserva orientação no círculo, $deg(f) = 1$, isto é, $F(x+1) = F(x) + 1$. Para x, $y \in [0,1)$ temos $|F(y) - F(x)| < 1$. De fato, se $x, y \in [0,1)$, então $|y - x| < 1$. Então, por um lado, como $y - x \leq |y - x|$, temos que $y - x < 1$ e portanto $y < x + 1$. Daí, aplicando F^n em ambos os lados dessa desigualdade temos

$$\begin{aligned} F^n(y) &< F^n(x+1) \\ &= F^n(x) + 1 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Portanto, $F^n(y) - F^n(x) < 1$.

Por outro lado, como $-y + x \leq |y - x|$, temos que $-y + x < 1$ e portanto, $x < y + 1$. Aplicando F^n em ambos os lados da desigualdade temos

$$\begin{aligned} F^n(x) &< F^n(y+1) \\ &= F^n(y) + 1 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Portanto, $F^n(x) - F^n(y) < 1$. Assim, concluímos que, em ambos os casos, vale $|F^n(y) - F^n(x)| < 1$. Agora,

$$\begin{aligned} \Big|\frac{F^n(x)-x}{n} - \frac{F^n(y)-y}{n}\Big| &= \frac{1}{n}|F^n(x) - x - F^n(y) + y)| \\ &\leq \frac{1}{n}(|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y|) \\ &\leq \frac{2}{n} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto x e y coincidem.

Reunindo todos os resultados, temos que $\rho_0(F) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^n(x)-x}{n}$ tanto existe como tem o mesmo valor para todo $x \in \mathbb{R}$. O que completa a demonstração.

□

Veremos agora algumas propriedades do número de rotação.

Lema 3.3.1. *Para todo $m \geq 1$, temos que $\rho(f^m) = m\rho(f)(mod1)$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \rho_0(F^m) \quad (mod1)\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(F^m)^n(x) - x}{n} \quad (mod1)\\ &= m. \lim_{n\to\infty} \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} \quad (mod1)\\ &= m\rho_0(F) \quad (mod1)\\ &= m\rho(f) \quad (mod1). \end{aligned} \tag{3.11}$$

□

Finalmente, uma importante propriedade do número de rotação $\rho(f)$ é

Teorema 3.3.2. *O número de rotação é um invariante por uma conjugação topológica. Em outras palavras, se $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação então $\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = \rho(f)$.*

Demonstração. Sejam f e g homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$ que preservam orientação no círculo e suponha que f e g sejam topologicamente conjugados. Então, existe um homeomorfismo h de $\mathbb{S}^1$ tal que

$$g \circ h = h \circ f \Rightarrow g \circ h \circ h^{-1} = h \circ f \circ h^{-1} \Rightarrow g = h \circ f \circ h^{-1}$$

Sejam F e H levantamentos de f e h, respectivamente, então $\pi \circ F = f \circ \pi$ e $\pi \circ H = h \circ \pi$. Daí

$$\pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ h \circ \pi \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi \circ H \circ H^{-1} = h^{-1} \circ \pi$$

Isto é, H^{-1} é um levantamento de h^{-1}.

Podemos mostrar ainda que $H^{-1} \circ F \circ H$ é um levantamento de $h^{-1} \circ f \circ h$. Com efeito,

$$\pi \circ (H^{-1} \circ F \circ H) = h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H = h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H = (h^{-1} \circ f \circ h) \circ \pi$$

Então, dado $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) - x}{n} &= \frac{(H^{-1} \circ F^n \circ H)(x) - x}{n} \\
&= \frac{H^{-1} \circ (F^n \circ H)(x) - F^n \circ H(x) + F^n \circ H(x)}{n} \\
&+ \frac{H(x) - H(x) - x}{n} \\
&= \frac{H^{-1} \circ (F^n \circ H)(x) - F^n \circ H(x)}{n} \\
&+ \frac{F^n \circ H(x)}{n} - \frac{H(x)}{n} + \frac{H(x) - x}{n} \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x)}{n}(mod1) \\
&= \Big(\lim_{n\to\infty} \frac{(H^{-1} \circ (F^n \circ H))(x) - F^n \circ H(x)}{n} \\
&+ \lim_{n\to\infty} \frac{F^n \circ H(x) - H(x)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{H(x) - x}{n} \Big)(mod1) \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Agora, $H(x) - x$ e $H^{-1}(x) - x$ são funções periódicas de período um. De fato,

$$\begin{aligned}
H(x+1) &= H(x) + 1 \\
&\Rightarrow \\
H(x+1) - (x+1) &= H(x) + 1 - (x+1) \\
&\Rightarrow \\
H(x+1) - (x+1) &= H(x) - x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H^{-1}(x+1) &= H^{-1}(x) + 1 \\
&\Rightarrow \\
H^{-1}(x+1) - (x+1) &= H^{-1}(x) + 1 - (x+1) \\
&\Rightarrow \\
H^{-1}(x+1) - (x+1) &= H^{-1}(x) - x
\end{aligned}$$

Assim, os numeradores do primeiro e terceiro limite são expressões limitadas independentes de x. Logo esses limites tendem a zero. Portanto,

$$\begin{aligned}\rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \lim_{n \to \infty} \frac{F^n \circ H(x) - H(x)}{n} (mod 1) \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} (mod 1) \\ &= \rho(f) \qquad (3.14)\end{aligned}$$

□

4 A classificação de Poincaré

Nesta seção apresentaremos o resultado principal deste trabalho. Trata-se do teorema de classificação de Poincaré, que nos garante a existência de uma semi-conjugação ou uma conjugação entre um homeomorfismo, com número de rotação irracional, e uma rotação no círculo. Para isto, faremos inicialmente uma descrição do comportamento possível das órbitas de homeomorfismos da circunferência.

4.1 Número de rotação racional

Teorema 4.1.1. *Se $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação no círculo então $\rho(f)$ é racional se, e somente se, f tem um ponto periódico.*

Demonstração. Considere um homeomorfismo que preserva orientação no círculo e assuma que f não tem pontos periódicos. Suponhamos que o número de rotação de f é racional, isto é, $\rho(f) = \frac{p}{q}$. Pelo lema 3.3.1, $\rho(f^q) = q.\rho(f)(mod1) = q.\frac{p}{q}(mod1) = p(mod1) = 0$.
Agora, tomemos $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ definida por $h(x) = f^q(x)$, logo $\rho(h) = \rho(f^q(x)) = 0$.
Como f não tem pontos periódicos, então h não tem pontos fixos. Com efeito, f não ter pontos periódicos significa que para todo $q \in \mathbb{Z}$, $f^q(x) \neq x$. Então, para todo $q \in \mathbb{Z}$,

$$
\begin{array}{rcl}
f^q(x) & \neq & x \\
& \Rightarrow & \\
h(x) & = & f^q(x) \neq x \\
& \Rightarrow & \\
h(x) & \neq & x
\end{array}
$$

e portanto, h não tem pontos fixos.
Seja $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de h. Como h não tem pontos fixos, $h(\pi(x)) \neq \pi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $\pi(H(x)) = h(\pi(x)) \neq \pi(x)$, isto é, $H(x) \neq x+p$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{Z}$. Então

$$\begin{cases} H(x) > x, \forall x \in \mathbb{R} \\ ou \\ H(x) < x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Suponha $H(x) > x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Daí, analisaremos dois casos:

1º) Se existir $k > 0$ tal que $H^k(0) > 1$, então $H^{mk}(0) > m$.

Por indução, se $m = 1$, temos que $H^{1.k}(0) > 1$, o que é verdade por hipótese.

Suponhamos que $H^{mk}(0) > m$ para todo inteiro maior que 1 e menor que m.

Assim, para m temos

$$\begin{aligned} H^{mk}(0) &= H^k(H^{(m-1)k}(0)) \\ &> H^k(m-1) \\ &= H^k(0 + (m-1)) \\ &= H^k(0) + (m-1) \\ &> 1 + (m-1) \\ &= m. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Portanto, $H^{mk}(0) > m$ para todo inteiro. Daí

$$\begin{aligned} \rho(h) &= \lim_{m\to\infty} \frac{H^m(0) - 0}{m}(mod 1) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{H^m(0)}{m}(mod 1) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{H^{mk}(0)}{mk}(mod 1) \\ &> \lim_{m\to\infty} \frac{m}{mk}(mod 1) && (4.2) \\ &= \frac{1}{k}(mod 1) && (4.3) \end{aligned}$$

Contradição, pois $\rho(h) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2º) Vamos admitir que $H^k(0) < 1$, $\forall k \geq 1$.

Dessa forma, a sequência $(H^k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Além disso, essa sequência é crescente. De fato, por hipótese, $H(x) > x$ e portanto $H(0) > 0$. Daí,

$$\begin{aligned} H^k(0) &= H^{k-1}(H(0)) \\ &> H^{k-1}(0) \\ &= H^{k-2}(H(0)) \\ &> H^{k-2}(0) \\ &\vdots \\ &> H(0) > 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Portanto, essa sequência possui limite. Seja p esse limite, então $\lim_{k\to\infty} H^k(0) = p$. Como H é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} H^{k+1}(0) = H(p)$

Tomemos uma subsequência $(y_k(0))_{k\in\mathbb{N}'}$, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, da sequência $(H^k(0))_{k\in\mathbb{N}}$, com $y_k = H^{k+1}(0)$. Evidentemente, $\lim_{k\to\infty} y_k(0) = p$. Como por outro lado $y_k = H^{k+1}(0)$, então $\lim_{k\to\infty} y_k(0) = H(p)$.

Pela unicidade do limite, $H(p) = p$. Mas, $h \circ \pi = \pi \circ H$. logo, $h(\pi(p)) = \pi(H(p)) = \pi(p)$, contradizendo o fato de h não ter pontos fixos.

Juntando todos os resultados, concluímos que $\rho(f)$ não pode ser racional se f não tiver pontos periódicos. O caso $H(x) < x$ é análogo. $\square$

Como consequência deste teorema, $\rho(f)$ é irracional se, e somente se, f não tem pontos periódicos.

Proposição 4.1.1. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é um homeomorfismo que preserva orientação no círculo. Se $\rho(f) = \frac{p}{q}$, com p e q relativamente primos entre si, então todo ponto periódico de f tem período igual a q.*

Demonstração. Como $\rho(f)$ é racional, pelo teorema anterior, f tem um ponto periódico. Seja $\pi(x)$ um ponto periódico qualquer de f, então devemos mostrar que $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$. Pela definição de levantamento, $f^q(\pi(x)) = \pi(F^q(x)) = F^q(x)(mod 1)$ e $\pi(x) = x(mod 1)$. Portanto, mostrar que $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ é equivalente a mostrar que $F^q(x) = x + p$, $p \in \mathbb{Z}$. Se $\pi(x)$ é um ponto periódico de período $q' \neq q$ e F um levantamento de f, então existe

$p' \in \mathbb{Z}$ tal que $F^{q'}(x) = x + p'$ e

$$\begin{aligned} k + \frac{p}{q} &= k + \rho(f) \\ &= \rho(f)(mod 1) \\ &= \rho_0(f) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^{nq'}(x) - x}{nq'} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{np'}{nq'} \\ &= \frac{p'}{q'}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tome F como sendo o único levantamento satisfazendo $\rho_0(F) = \rho(f)$. Seja d o m.d.c de p' e q' então, $p' = pd$ e $q' = qd$.

Afirmamos que $F^q(x) = x + p$. De fato, se isto não ocorre então, $F^q(x) > x + p$ ou $F^q(x) < x + p$. Suponhamos que $F^q(x) > x + p$ (o outro caso é análogo) então, pela monotonicidade de F temos

$$\begin{aligned} F^{q'}(x) &= F^{dq}(x) \\ &= F^{(d-1)q}(F^q(x)) \\ &> F^{(d-1)q}(x + p) \\ &= F^{(d-1)q}(x) + p \\ &= F^{(d-2)q}(F^q(x)) + p \\ &> F^{(d-2)q}(x + p) + p \\ &= F^{(d-2)q}(x) + p + p \\ &= F^{(d-2)q}(x) + 2p \\ &\vdots \\ &> x + dp \\ &= x + p'. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Contradição! □

Suponha que f é um homeomorfismo de $\mathbb{S}^1$. Dado qualquer subconjunto $A \subset \mathbb{S}^1$ e um ponto $x \in A$, definimos uma ordenação em A, levantando A ao intervalo $[x', x' + 1] \subset \mathbb{R}$, onde $x' \in \pi^{-1}(x)$, e considerando a ordem natural sobre $\mathbb{R}$.

Em particular, se $x \in \mathbb{S}^1$, então a órbita $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$ tem uma ordem natural, considerando x como ponto de referência.

A proposição a seguir garante a existência de uma relação entre órbitas periódicas de um homeomorfismo f com número de rotação racional $\frac{p}{q}$ e a órbita de 0 pela rotação R_ρ.

Proposição 4.1.2. *Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação racional $\rho(f) = \frac{p}{q}$, com p, q relativamente primos entre si. Então, para qualquer ponto periódico $x \in \mathbb{S}^1$, isto é, $f^q(x) = x$, a ordenação $\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x)\}$ em $\mathbb{S}^1$ é a mesma que o conjunto $\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., \frac{(q-1)p}{q}\}$, o qual é a órbita de 0 pela rotação R_ρ.*

Demonstração. Seja x um ponto periódico de f, de período q, isto é, $f^q(x) = x$ e $i \in \{0, ..., q-1\}$ o único número tal que $f^i(x)$ é o primeiro ponto à direita de x, na órbita de x.

Agora, $f^{2i}(x)$ deve ser o primeiro ponto à direita de $f^i(x)$. De fato, seja x o ponto de referência na órbita de x. Se existir l, tal que $f^l(x) \in (f^i(x), f^{2i}(x))$ então aplicando f^{-i}, temos que $f^{l-i}(x)$ deve pertencer ao intervalo $(x, f^i(x))$, já que f preserva a orientação. Mas isso, contradiz o fato de $f^i(x)$ ser o primeiro ponto a direita de x. Assim os pontos da órbita de x são ordenados como $x, f^i(x), f^{2i}(x), ..., f^{(q-1)i}(x)$.

Tome $x' \in \pi^{-1}(x)$. Como f^i transforma cada intervalo da forma $[f^{ki}(x), f^{(k+1)i}(x)]$ no seu sucessor e existem q destes intervalos, então podemos tomar um levantamento F' de f^i tal que $F'^q(x') = x' + 1$. Agora, seja F um levantamento de f com $F^q(x') = x' + p$. Já vimos que F^i é um levantamento de f^i, logo, $F^i(x) = F'(x') + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Então,

$$x' + ip = F^{qi}(x') = (F' + k)^q(x') = F'^q(x') + kq = x' + 1 + kq.$$

Portanto, $ip = 1 + kq$, e assim i é o único número entre 0 e q tal que $ip = 1(modq)$.

Fazendo $f = R_{\frac{p}{q}}$, então o conjunto $\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., \frac{(q-1)p}{q}\}$ é uma órbita periódica e portanto, está ordenada como $\{0, \frac{ip}{q}, \frac{2ip}{q}, ..., \frac{(q-1)ip}{q}\}$, com o $ip = 1 \pmod q$, tal como anteriormente. $\square$

4.2 Número de rotação irracional

Se x e y são dois pontos em $\mathbb{S}^1$, então definimos o intervalo $[x, y] \subset \mathbb{S}^1$ sendo $\pi([x', y'])$, onde $x' \in \pi^{-1}(x)$ e $y' = \pi^{-1}(y) \cap [x', x' + 1]$. Intervalos abertos e semi-abertos são definidos de maneira semelhante.

Lema 4.2.1. *Suponha $\rho(f)$ irracional. Então, para qualquer $x \in \mathbb{S}^1$ e quaisquer inteiros distintos $m > n$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \in I = [f^m(x), f^n(x)]$.*

Demonstração. Basta mostrar que $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k} I = \bigcup_{k=0}^{\infty} [f^{m-k}(x), f^{n-k}(x)]$. Suponha que não, então

$$S^1 \not\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-k(m-n)} I = \bigcup_{k=1}^{\infty} [f^{-(k-1)m+kn}(x), f^{-km+(k+1)n}(x)]$$

Uma vez que os intervalos $f^{-k(m-n)} I$ se encontram no ponto $f^{-km+n(k+1)}$, isto é, nos seus extremos, a sequência

$$S_k = f^{-k(m-n)} f^n(x) = f^{-km+(k+1)n}(x)$$

é monótona limitada. De fato,

$$\begin{aligned} J_k &= [f^{-(k-1)m+kn}(x), f^{-km+(k+1)n}(x)] \\ J_{k+1} &= [f^{-km+(k+1)n}(x), f^{-(k+1)m+(k+2)n}(x)] \\ J_{k+2} &= [f^{-(k+1)m+(k+2)n}(x), f^{-(k+2)m+(k+3)n}(x)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

são intervalos adjacentes. Assim, como f preserva orientação, aplicando $f^{-(m-n)}$, temos

$$\begin{aligned} f^{-km+(k+1)n}(x) &< f^{-(k+1)m+(k+2)n}(x) \\ &\Rightarrow \\ f^{-km+(k+1)n-(m-n)}(x) &< f^{-(k+1)m+(k+2)n-(m-n)}(x) \\ &\Rightarrow \\ f^{-(k+1)m+(k+2)n}(x) &< f^{-(k+2)m+(k+3)n}(x) \end{aligned}$$

Continuando esse processo para todos os termos da sequência S_k, concluímos que S_k é monótona (os casos $\leq, \geq, >$ são análogos).

Além disso, S_k é limitada já que $\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k(m-n)} I$ não cobre todo o círculo $\mathbb{S}^1$.

Logo, S_k é monótona limitada e portanto convergente, isto é, S_k converge monotonicamente para um ponto $z \in \mathbb{S}^1$.

Considere a sequência $S'_k = f^{-k(m-n)-(m-n)} f^n(x)$. Então, por um lado,

$$\begin{aligned} S'_k &= f^{-k(m-n)-(m-n)} f^n(x) \\ &= f^{-k(m-n)} f^n f^{-(m-n)}(x) \\ &= f^{-(m-n)}(S_k). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} S'_k &= f^{-k(m-n)-(m-n)} f^n(x) \\ &= f^{-(k+1)(m-n)} f^n(x) \\ &= S_{k+1}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Isto é, $S'_k = S_{k+1}$ e então S'_k é uma subsequência de S_k.

Então, se $S_k \to z$ temos que $S_{k+1} \to z$, isto é $S'_k \to z$. Com efeito, se $S_k \to z$ então dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $k \geq k_0$ implica $|S_k - z| < \varepsilon$, em particular, se $k \geq k_0$ implica $|S_{k+1} - z| < \varepsilon$, então $S_{k+1} \to z$ e portanto $S'_k \to z$.

Mas como $S'_k = f^{-(m-n)}(S_k)$ então, pela continuidade de f, $z = f^{-(m-n)}(z)$, o que implica que z é periódico, contradizendo o fato de $\rho(f)$ ser irracional. $\square$

Vejamos agora a seguinte proposição.

Proposição 4.2.1. *Se $\rho(f)$ é irracional, então $\omega(x) = \omega(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{S}^1$, e também $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ ou $\omega(x)$ é perfeito (fechado e sem pontos isolados) e não denso em nenhum aberto.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $\omega(x) = \omega(y)$, $\forall x, y, \in \mathbb{S}^1$. Seja $z \in \omega(x)$. Então existe $f^{a_n}(x) \to z \in \omega(x)$ para alguma sequência $a_n \to \infty$. Se $y \in \mathbb{S}^1$ então, pelo lema anterior, existe $b_n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{b_n}(y) \in [f^{a_{n-1}}(x), f^{a_n}(x)]$. Então, $f^{b_n}(y) \in [f^{a_{n-1}}(x), f^{a_n}(x)]$. Como $f^{a_n}(x) \to z$, segue-se que $f^{b_n}(y) \to z$ e portanto $z \in \omega(y)$. Assim $\omega(x) \subset \omega(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{S}^1$. Por simetria, $\omega(x) = \omega(y)$.

Provaremos agora que o conjunto $\omega(x) = \mathbb{S}^1$ ou $\omega(x)$ é perfeito e denso em nenhum aberto. Note que o conjunto $\omega(x)$ é minimal. De fato, $\mathbb{S}^1$ é um conjunto compacto, logo pela proposição 2.3.1, $\omega(x)$ é não vazio, fechado e invariante. Resta-nos mostrar que se B é um subconjunto não vazio, fechado e invariante de $\omega(x)$, então $B = \omega(x)$. Suponha que $\omega(x) - B \neq \emptyset$ então, se $y \in B$, pelo teorema 2.3.1 (b), $\omega(y) \subset B$. Mas, $\omega(y) = \omega(x)$, $\forall x, y \in \mathbb{S}^1$ e portanto $\omega(x) \subset B$, contradição. Logo, $B = \omega(x)$ e $\omega(x)$ é minimal.

Notemos também que $\omega(x)$ é o único conjunto fechado minimal não-vazio e invariante. De fato, suponha que $A \subset \mathbb{S}^1$ é um conjunto não-vazio invariante, daí seja $x \in A$, então a órbita $O_f(x) = \{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset A$. Além disso, como A é fechado, $\omega(x) \subset A$. Agora, o fato de A ser um conjunto minimal, implica que $\omega(x) = A$. Logo, $\emptyset$ e $\omega(x)$ são os únicos subconjuntos fechados e invariantes de $\omega(x)$.

A fronteira $\partial\omega(x)$ é um subconjunto fechado e invariante de $\omega(x)$. De fato, $\omega(x)$ é fechado, então $\partial\omega(x) \subset \omega(x)$. Para mostrarmos que $\partial\omega(x)$ é um conjunto invariante, devemos mostrar que $\partial\omega(x) = f(\partial\omega(x))$ para todo x. Seja $y \in f(\partial\omega(x))$, então existe $z \in \partial\omega(x)$ tal que $f(z) = y$. Assim, existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to z$. Pela continuidade de f, vale que $f(f^{n_k}(x)) \to f(z) = y$, isto é, $f^{n_k+1}(x) \to y$. Como $n_k \to \infty$, segue-se que $(n_k + 1) \to \infty$ e portanto $y \in \partial\omega(x)$. Assim, $f(\partial\omega(x)) \subset \partial\omega(x)$. Por outro lado, se $y \in \partial\omega(x)$, devemos mostrar que existe $z \in \partial\omega(x)$ tal que $f(z) = y \in f(\partial\omega(x))$. Com efeito, o fato de $y \in \partial\omega(x)$ implica que existe uma sequência $n_k \to \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \to y$. Tomemos as pré-imagens da sequência n_k que estão na órbita de x. Tais pré-imagens formam uma sequência n'_k contida no conjunto compacto X, pois $\partial\omega(x) \subset \omega(x)$ e $\omega(x)$ está contido no compacto X. Desse modo, n'_k possui uma subsequência que converge para $z \in \partial\omega(x)$. Assim, $n'_k \to z$ e portanto $f(n'_k) \to f(z) = y$. Logo, $y \in f(\partial\omega(x))$. Dessa forma, concluímos que $\partial\omega(x) = f(\partial\omega(x))$ e portanto $\partial\omega(x)$ é invariante.

Concluímos que $\partial\omega(x) = \emptyset$ ou $\partial\omega(x) = \omega(x)$. Se $\partial\omega(x) = \emptyset$ então, $\omega(x) = S^1$. Se $\partial\omega(x) = \omega(x)$ então $\omega(x)$ é denso em nenhum aberto. De fato, seja A um aberto qualquer tal que $A \subset \omega(x)$. Por hipótese, $\partial\omega(x) = \omega(x)$, então $A \subset \partial\omega(x)$ e isto implica que existem pontos de A que não estão na $\partial\omega(x)$, e portanto não estão em $\omega(x)$, contradição. Logo, o aberto A não pode está em $\omega(x)$ e portanto $\omega(x)$ é denso em nenhum aberto.

Resta-nos mostrar que $\omega(x)$ é perfeito. Seja $z \in \omega(x)$, uma vez que $\omega(x)$ é invariante e fechado, temos que $z \in \omega(x) = \omega(z)$ é o ponto limite de $\{f^n(z)\} \subset \omega(x)$, assim $\omega(x)$ é perfeito. $\square$

Lema 4.2.2. *Suponha que $\rho(f)$ é irracional. Seja F um levantamento de f e $\rho = \rho(F)$. Então para qualquer $x \in \mathbb{R}$,*

$$n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2 \Longleftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

para qualquer $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponha que $F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$ isto é, $F^{n_1}(x) - F^{n_2}(x) < m_2 - m_1$. Esta última desigualdade é equivalente a $F^{n_1-n_2}(x) < x + m_2 - m_1$, basta fazer $n_1 = n_1 - n_2$ e $n_2 = 0$.
A desigualdade acima é válida para todo x, pois se existisse algum x tal que $F^{n_1-n_2}(x) = x + m_2 - m_1$, f teria pontos periódicos e o número de rotação seria racional, contradizendo a hipótese. Em particular, se $x = 0$ temos $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$.

Agora, $F^{k(n_1-n_2)}(0) < k(m_2 - m_1)$. De fato, se $k = 1$, $F^{1(n_1-n_2)}(0) < 1(m_2 - m_1)$ e então $F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$. Suponha que $F^{k(n_1-n_2)}(0) < k(m_2 - m_1)$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$\begin{aligned} F^{(k+1)(n_1-n_2)}(0) = & \quad F^{(n_1-n_2)}(F^{k(n_1-n_2)}(0)) \\ < & \quad F^{k(n_1-n_2)}(0) + (m_2 - m_1) \\ < & \quad k(m_2 - m_1) + (m_2 - m_1) \\ = & \quad (k+1)(m_2 - m_1). \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade é verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, como $F^{(k(n_1-n_2)}(0) < k(m_2 - m_1)$ segue-se que se $n_1 - n_2 > 0$,

$$\tfrac{F^{k(n_1-n_2)}(0)}{k} < (m_2 - m_1) \Rightarrow \tfrac{F^{k(n_1-n_2)}(0)}{k(n_1-n_2)} < \tfrac{m_2-m_1}{n_1-n_2}.$$

Daí,

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(0)}{k(n_1-n_2)} \leq \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_2}.$$

A irracionalidade de ρ implica a desigualdade estrita, portanto,

$$\rho < \tfrac{m_2-m_1}{n_1-n_2} \Rightarrow n_1\rho + m_1 < n_2\rho + m_2.$$

O mesmo resultado se mantém no caso $n_1 - n_2 < 0$, por um argumento análogo. A recíproca segue invertendo a desigualdade. □

Teorema 4.2.1. *(***Teorema de Poincaré)** *Seja* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *um homeomorfismo que preserva orientação com número de rotação irracional* ρ.

1) Se f *é topologicamente transitiva então* f *é conjugada topologicamente à rotação* R_ρ.

2) Se f não é topologicamente transitiva, então R_ρ é um fator topológico de f, através de uma aplicação monótona, contínua e não-invertível $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

Demonstração. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f e fixe $x \in \mathbb{R}$. Considere também os conjuntos $A = \{F^n(x) + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{n\rho + m : n, m \in \mathbb{Z}\}$. Defina $H : A \to B$ por $H(F^n(x) + m) = n\rho + m$. Pelo lema anterior, H é monótona.

O conjunto B é denso em $\mathbb{R}$. De fato, seja $J \subset \mathbb{R}$ um aberto qualquer e $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, onde $\pi(x) = x(mod1)$ a aplicação projeção. Considere também a rotação $R_\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, onde $R_\rho(x) = x + \rho$. Pelo Teorema de Jacobi a rotação R_ρ é minimal, isto é, a órbita $O_{R_\rho}(x) = \{R_\rho^n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa em $\mathbb{S}^1$, $\forall x \in \mathbb{S}^1$. Em particular, a órbita de 0, $O_{R_\rho}(0) = \{R_\rho^n(0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é densa em $\mathbb{S}^1$. Então, considerando o intervalo $\pi(J) = I \subset \mathbb{S}^1$, temos que $R_\rho^n(0) \in I = \pi(J)$. Logo, existe $x \in J$ tal que $R_\rho^n(0) = \pi(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Agora, seja F um levantamento de R_ρ. Já vimos que então, F^n é um levantamento de R_ρ^n. Logo, existe $y \in J$ tal que $F^n(0) = y$, $n \in \mathbb{Z}$. Pela definição de levantamento temos

$$\begin{aligned}
\pi \circ F^n(0) &= R_\rho^n \circ \pi(0) \\
&\Rightarrow \\
\pi(y) &= R_\rho^n(0) \\
&\Rightarrow \\
\pi(y) &= n\rho \\
&\Rightarrow \\
y(mod1) &= n\rho \\
&\Rightarrow \\
y &= n\rho + m
\end{aligned}$$

Portanto, o conjunto B é denso em $\mathbb{R}$.

Se abusarmos da notação e escrevermos R_ρ como a transformação $R_\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $R_\rho(x) = x + \rho$ então $H \circ F = R_\rho \circ H$ em A, já que

$$\begin{aligned}
H \circ F(F^n(x) + m) &= H \circ F(F^n(x + m)) \\
&= H \circ F^{n+1}(x + m)) \\
&= H(F^{n+1}(x) + m) \\
&= (n + 1)\rho + m \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

e

$$R_\rho \circ H(F^n(x) + m) = R_\rho(n\rho + m)$$
$$= n\rho + m + \rho$$
$$= (n+1)\rho + m \quad (4.10)$$

Afirmação: H se estende continuamente ao fecho de A.
De fato, se $y \in \overline{A}$ então existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim x_n = y$. Queremos definir $H(y) = \lim H(x_n)$. Para mostrarmos que $\lim H(x_n)$ existe e independe da escolha da sequência se aproximando de y, observe que os limites laterais existem e são independentes da sequência, pois H é monótona. Se os limites laterais fossem diferentes então, $\mathbb{R} - B$ conteria um intervalo, contradizendo o fato de B ser denso em $\mathbb{R}$. Portanto, $\lim H(x_n)$ existe e independe da sequência que se aproxima de y.
1º caso: $\overline{A} \neq \mathbb{R}$.

A transformação H pode agora ser estendida a $\mathbb{R}$. A função $H : \overline{A} \to \mathbb{R}$ é monótona e sobrejetiva, já que H é monótona e contínua em A, $\overline{A}$ é fechado e B é denso em $\mathbb{R}$, então não existe alternativa a definir H nos intervalos complementares a $\overline{A}$. A única alternativa é que $H =$ constante nesses intervalos, pois se H não é contante, teremos que defini -la nesses intervalos de alguma outra forma, já que H é sobrejetiva, mas qualquer outra forma contraria a monotonicidade de H.

Escolhamos a constante igual aos valores nos extremos desses intervalos. Tal origina uma transformação $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ onde $H \circ F = R_\rho \circ H$. De fato, já vimos que para todo $x \in A$ tal igualdade se verifica. Mas, como H é uma extensão contínua ao fecho $\overline{A}$ de A, segue-se que a igualdade também é válida para pontos de $\overline{A}$.

Resta-nos mostrar que $H \circ F = R_\rho \circ H$ se verifica para todo ponto x contido nos intervalos complementares de $\overline{A}$. Sejam $x \in \overline{A}^C$, $u \in \partial\overline{A}$ tal que $H(x) = H(u)$ e considere o intervalo $[u, x]$ que, por construção, não contém pontos de A, isto é, $[u, x] \cap A = \emptyset$, então $[F(u), F(x)] \cap A = \emptyset$. De fato, se existe y tal que $y \in [F(u), F(x)] \cap A = \emptyset$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um $z \in [u, x]$ tal que $F(z) = y$. Logo, $F^{-1}(y) \cap [u, x] \neq \emptyset$ e $F^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$, contradição. Portanto, $H(F(x)) = H(F(u)) =$

constante. Então, como $u \in \overline{A}$, temos que $H(F(u)) = R_\rho(H(u))$ e portanto

$$\begin{aligned} H \circ F(x) &= H(F(x)) \\ &= H(F(u)) \\ &= R_\rho(H(u)), \\ &= R_\rho(H(x)) \\ &= R_\rho \circ H(x) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, se $z \in A$, temos

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\rho + m + 1 = H(z) + 1$$

e essa propriedade é válida para a extensão contínua. De fato, dado x contido em algum intervalo complementar a $\overline{A}$, temos $H(x) + 1 = H(u) + 1 = H(u+1)$, pois $u \in \overline{A}$. Agora, seja $x \in \overline{A}^C$ e $u \in \partial\overline{A}$ tal que $H(x) = H(u)$, então se $[u, x] \cap A = \emptyset$ vale que $[u+1, x+1] \cap A = \emptyset$. Com efeito, se existe $y \in [u+1, x+1] \cap A$, então $y - 1 \in A$ e $y - 1 \in [u, x]$, contradizendo o fato de $[u, x]$ não ter pontos de A. Assim, $H(u+1) = H(x+1)$ e portanto $H(x) + 1 = H(x+1)$ para todo x contido em algum intervalo complementar a $\overline{A}$.

Essa propriedade garante a existência de uma semi-conjugação $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = R\rho \circ h$. Isto conclui a demonstração do teorema para o caso em que f não é transitiva.

2º caso: $\overline{A} = \mathbb{R}$.

Suponha agora que $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ é transitiva, então o conjunto A é denso em $\mathbb{R}$. De fato, seja I um intervalo aberto qualquer de $\mathbb{R}$. Considere também a aplicação projeção $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, então $\pi(I)$ é um intervalo de $\mathbb{S}^1$. Todo ponto de $\pi(I)$ tem uma pré-imagem em I, ou seja, dado $z \in \pi(I)$ existe $y \in I$ tal que $\pi(y) = z$.

Como f é transitiva, a órbita de $\pi(x) \in \mathbb{S}^1$ e então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(\pi(x)) \in \pi(I)$. Logo, existe $y \in I$ tal que $\pi(y) = f^n(\pi(x))$.

Como F é um levantamento de f e portanto, F^n é um levantamento de f^n, temos

$$\begin{aligned} \pi(F^n(x)) &= f^n(\pi(x)) \\ &\Rightarrow \\ \pi(F^n(x)) &= \pi(y) \\ &\Rightarrow \\ y &= F^n(x) + m \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto A é denso em $\mathbb{R}$.

Desse modo, $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$ e portanto $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona e bijetiva. Logo, podemos obter um homeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = R_\rho \circ h$ e isso completa a demonstração. $\square$

5 Considerações finais

A última seção do nosso trabalho apresenta uma descrição do comportamento das órbitas de homeomorfismos da circunferência. A classificação de Poincaré descreve seis tipos diferentes de órbitas sob uma transformação.
Quando o número de rotação é racional, temos as seguintes órbitas:

I. Órbita periódica com o mesmo período que $R_{\frac{p}{q}}$ ordenada como uma órbita de $R_{\frac{p}{q}}$;

II. Uma órbita homoclínica: aproxima-se de uma dada órbita periódica quando $n \to +\infty$ e quando $n \to -\infty$;

III. Uma órbita heteroclínica: aproxima-se de duas órbitas periódicas distintas quando $n \to +\infty$ e quando $n \to -\infty$.

Já quando o número de rotação é irracional (ρ), temos:

I': Uma órbita densa em $\mathbb{S}^1$ ordenada como uma órbita de R_ρ;

II': Uma órbita densa num conjunto de Cantor;

III': Uma órbita homoclínica a um conjunto de Cantor.

Em nosso trabalho foram estudadas apenas as órbitas dadas por I e I'.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon L., *Espaços métricos*, IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2013.

[2] Lima, Elon L., *Curso de análise*, IMPA (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, 2013.

[3] Brin, Michael and Stuck, Garret, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge, New York, 2002.

[4] Katok, Anatole e Hasselblatt, Boris, *A moderna teoria de sistemas dinâmicos*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2005.

[5] Araújo, Ermenson R., *O teorema de Denjoy*, Apresentado em 2012, nº folhas: 40, Monografia (Licenciando em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luíz.

[6] Vasgas, Walter T. H., *Sobre a exitência de pontos periódicos para homeomorfismos do anel fechado*, Apresentado em 2006, nº folhas: 44, Dissertação (Mestrando em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Carlos.

[7] Baraviera, Alexandre T. e Branco, Flávia M., *Sistemas Dinâmicos: uma primeira visão.* Notas para minicurso do II Colóquio de Matemática da região Sul, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande so Sul, 2012.

[8] Robinson, Clark. *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, 1998.

[9] Devaney, R. L. *Introduction to chaotic dynamical systems.* 2 nd. ed. Addison - Weslley Publisheng Company, 1989.

[10] Pollicott, M.; Yuri, M. *Dynamical systems and ergodic theory.* London Mathematical Society Student.